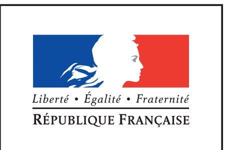


MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

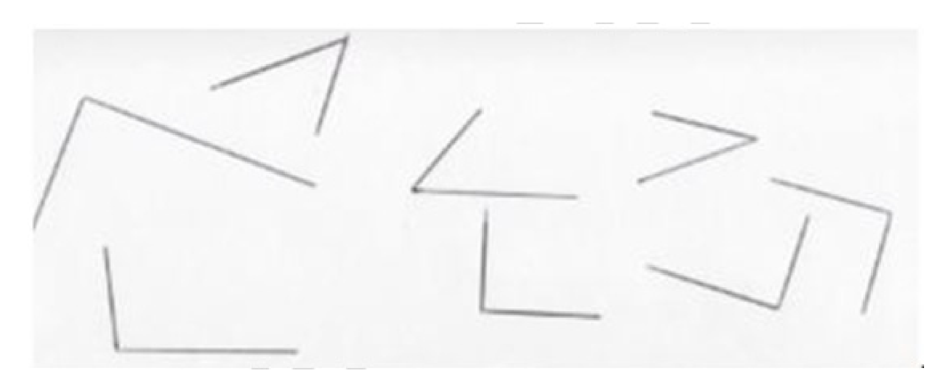


Chercher

Chercher est peut-être la première des compétences à laquelle on pense lorsqu'on tente de décrire l'activité mathématique. Elle en constitue sans doute la part la plus exaltante pour celles et ceux qui aiment les mathématiques. Mais aussi la part la plus difficile pour d'autres. Il faut reconnaitre qu'il s'agit de l'une des compétences qui se laissent le moins facilement circonscrire. Amener les élèves à savoir quoi chercher et comment chercher est donc un objectif ambitieux, mais nécessaire au développement de toutes les autres compétences au cycle 4.

Deux activités pour un même terme

La compétence « Chercher » recouvre dans le travail quotidien de l'élève comme du mathématicien deux activités qu'il convient de distinguer. On peut illustrer cette dualité, qui tient simplement à la polysémie du verbe chercher, par les deux consignes suivantes, toutes deux relatives à une série de représentations d'angles :



- Première consigne : « Chercher quels sont les angles droits »
- Deuxième consigne : « Chercher comment classer les angles »

Il s'agit de deux activités mettant en œuvre une recherche, mais alors que dans le premier cas, l'élève met en œuvre des processus éprouvés, repère et utilise les attitudes expertes qui lui auront explicitement été indiquées comme telles, dans l'autre, il s'agit de donner un sens à la question, voire de définir la question.

Le préambule du programme de mathématiques du cycle 4 illustre bien le premier sens de la compétence « Chercher » dans la mesure où il précise qu'on attend de l'élève qu'il sache « extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances ».

Au cycle 4, on laisse à l'élève plus d'autonomie. Les situations proposées nécessitent en effet une part plus importante d'initiative : compléter un tableau, voire construire un tableau qui n'est pas présent, effectuer des calculs qui ne sont pas explicitement demandés.

Quant au deuxième sens, il est également présent dans le volet « Compétences travaillées » du programme: il s'agit d'« émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples », mais aussi de « tester, essayer plusieurs pistes de résolution ».

Dans ce second sens, il est cependant moins évident de décrire de quoi il s'agit et ce qu'on attend véritablement de l'élève. Il ne s'agit pas, en tout cas, de deviner une question fermée que l'enseignant aurait en tête et il convient d'explorer plus avant ce qui constitue cette part essentielle de la compétence « Chercher ».

Que se passe-t-il lorsque l'on cherche ?

Chercher peut être vu en première analyse comme une activité transitoire pour l'élève, un échafaudage que l'on oublie une fois le bâtiment achevé. Pour aboutir au résultat d'un calcul, pour établir un raisonnement, pour construire une modélisation, on sait qu'il a fallu une phase de recherche, mais qui ne laisse pas de trace sur le résultat final : on recopie au propre et on note la synthèse dans le cahier.

Cette phase de recherche et de tâtonnement (« *je cherche...* », dit l'élève en cachant son cahier) est pourtant essentielle en mathématiques et la réussite de tous les élèves passe par le fait d'expliciter au mieux ce qui s'y joue.

On peut dégager au moins deux grands axes dans cette réflexion sur l'activité de recherche.

La dimension temporelle est essentielle : il faut du temps, et c'est dans le temps que les choses vont se transformer. Ne pas donner immédiatement l'idée, ou une amorce de solution, mais laisser un temps d'indétermination où puissent s'élaborer des représentations personnelles et variées.

La place de l'erreur constitue également un élément capital : si transformation il y a, c'est qu'à un moment, les choses n'étaient pas justes. Comme le dit le mathématicien Alexandre Grothendieck[1] : « *Craindre l'erreur et craindre la vérité est une seule et même chose. Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir. C'est quand nous craignons de nous tromper que l'erreur qui est en nous se fait immuable comme un roc.* »

Cette peur dont parle le mathématicien (peur de se tromper, peur de ne pas bien faire, de ne pas savoir quoi faire) une phrase aussi anodine que « *Voilà, maintenant, vous pouvez chercher* » peut la déclencher chez les élèves : chercher quoi, chercher comment, chercher jusqu'où ? Si cette phrase est prononcée, il faut donc qu'elle ait été précédée d'expériences plus balisées. Il faut également laisser un temps suffisant pour prendre le risque d'essayer, de se tromper, d'identifier son erreur, mais un temps explicitement limité pour ne pas tomber dans une activité sans limite et sans consistance. Il faut enfin donner aux élèves les outils permettant de dépasser la peur de se tromper.

1. *Récoltes et Semailles : Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*, Université Paris 6, Grothendieck Circle, 1986, Première partie, § 5.2.

Un chemin qui laisse des traces

Ces outils peuvent être définis comme ce qui reste lorsque la recherche est terminée, en dehors du résultat lui-même. Ils peuvent être pour une part identifiés par les élèves, par le biais d'un carnet de recherche ou de phrases notées sur le cahier : «*j'ai essayé avec trois et quatre*», «*j'ai fait des figures et j'ai mesuré*». Mais ils doivent aussi être explicitement isolés et identifiés par l'enseignant : «*vous avez essayé plusieurs choses très intéressantes…*», «*en fait, ce que tu as fait, c'est ce qu'on appelle…*», «*lorsque l'on rencontre un problème de ce type, on fait souvent plusieurs figures…*»

Cette manière d'associer des problèmes et des méthodes permet ensuite de construire des situations références : «*et si tu essayais les mêmes idées que pour le problème de la somme de trois nombres ?*». Les élèves peuvent ainsi peu à peu donner de l'épaisseur à l'activité de recherche : chercher, c'est tester avec des nombres, c'est émettre des hypothèses, c'est parfois proposer une question. Le passage à la démonstration, qui constitue un des objectifs du cycle 4, ne peut être réussi pour les élèves les plus fragiles que s'ils en perçoivent les moyens et les buts au travers de situations diverses et explicitement désignées comme représentatives de l'activité de recherche.

On notera à ce stade qu'au travers de l'apparition du thème E, « Algorithmique et programmation », ces questions trouvent un cadre nouveau et particulièrement propice. Tout d'abord, les outils de la recherche y sont explicitement désignés comme des objets de savoir à part entière : «décomposer un problème en sous-problèmes», «reconnaitre des schémas», outils et méthodes qui seront évidemment réinvestis avec profit dans d'autres champs du programme.

Ce thème offre également un cadre rassurant aux élèves quant à la place de l'erreur, qui fait en effet partie intégrante de la démarche de programmation : «Écrire, mettre au point (tester, corriger) et exécuter un programme en réponse à un problème donné». De plus, la validation n'y est pas celle de l'enseignant, mais celle, plus neutre, de l'exécution du programme qui marche ou ne marche pas.

Une activité extraordinaire ?

La mention du carnet de recherche amène naturellement à évoquer la pratique des problèmes ouverts, et plus largement des défis, dans la classe, mais aussi en dehors de la classe sous la forme de clubs, ateliers, concours (MATh.en.JEANS, stages MathC2+, etc.). L'apport de tels dispositifs est indéniable, dans leur dimension collective et collaborative, comme dans leur aspect ludique. Mais ce serait une erreur de réduire la compétence «Chercher» à une activité extraordinaire, rare et sans effet sur l'ordinaire de la classe constitué quant à lui de questions fermées et balisées. Il importe de repenser les activités les plus quotidiennes, les plus simples, sous l'angle de ce qu'elles peuvent apporter, même modestement, à l'élaboration de la compétence «Chercher».

Cela peut être à l'occasion d'une activité de calcul mental, sous forme de petits défis : trouver l'opération et non pas le résultat, trouver le résultat le plus grand possible, ou travailler sur la multiplication, comme sur cet exemple[2] :

2. Exemple issu de *Le calcul mental au collège*, sous la direction de Bernard Anselmo et Hélène Zuchetta, 2013.

Nombre de départ → ×5
↓
×3
↓
Nombre d'arrivée ← ×2

Une série de nombres de départ étant donnés, la consigne est de calculer le plus vite possible, ce qui peut constituer une première approche de certaines propriétés du produit, avant de les institutionnaliser peu à peu.

L'arithmétique est un terreau particulièrement riche pour entretenir au quotidien la compétence « Chercher ». La familiarité des élèves avec les nombres entiers leur permet en effet de s'engager plus facilement dans une démarche d'essais et hypothèses. L'élaboration d'une conjecture utilisant le langage symbolique peut constituer alors l'un des buts de la phase de recherche[3].

En algèbre, un travail sur les variables didactiques peut souvent permettre de transformer une question fermée en une activité mettant en œuvre une véritable recherche. Ainsi, lors d'un travail sur l'utilisation du calcul algébrique pour montrer que deux programmes de calcul donnent le même résultat, on peut remplacer la consigne « *Montrer que les programmes suivants aboutissent tous les deux au même résultat* » par la consigne « *Voici deux programmes de calcul, que peut-on en dire ?* ». L'élève est ainsi amené à expérimenter, à déterminer peu à peu une question, ainsi que les moyens d'y répondre.

En géométrie, les problèmes de construction forment un grand répertoire d'activités de recherche où la découverte progressive des configurations et des transformations outille peu à peu l'élève. L'utilisation d'un même support peut par ailleurs amener des questions qui mettent en jeu une recherche autour des transformations, en variant les niveaux de difficulté.

Considérons par exemple le pavage ci-contre (Mozaïque de l'Alhambra)

- Comment ce pavage est-il construit ? »
- Cette figure étant donnée, comment peut-on construire le pavage ? »
- Quelles transformations reconnait-on ? »
- Comment peut-on construire le pavage à partir de la figure la plus simple possible ? »
- Peut-on construire le même pavage, avec des motifs différents ? »



Source : FreeImages.com /Eric Weijers

Conclusion

Remettre du doute, remettre du jeu pour conserver ce plaisir de l'activité mathématique quotidienne que connaissent les enfants au cycle 3, tout en poursuivant le développement des autres compétences, tels sont les enjeux de l'attention portée au cycle 4 au développement de la compétence « Chercher ».

3. Et ce même si la démonstration de la conjecture n'est pas à la portée des élèves.

Bibliographie

- ASTOLFI,J.-F.(1997). L'erreur, un outil pour enseigner. Paris : ESF.
- PERRIN D. (2007), En mathématiques, que cherche-t-on ? comment cherche-t-on ? conférence donnée au collège de Boussy Saint-Antoine.
- Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques de 2008 :
  - Géométrie au collège
  - Raisonnement et démonstration
- ANSELMO B. & ZUCHETTA H.(dir.) (2013). Le calcul mental au collège. Paris : SCEREN.
- MANTE M.& ARSAC B.(2007). Les pratiques du problème ouvert. Paris : SCEREN.
- BAUDART F.(2011). Monde de l'oral et monde de l'écrit en mathématiques, Le Français aujourd'hui174,107-118 .
- Document préparatoire à la 16° étude de la CIEM[4] : Challenging Mathematics in and beyond the Classroom (le document est en français).

4. Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Retrouvez Éduscol sur









MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE




Modéliser

La compétence « Modéliser », si on la prend dans son acception la plus large, renvoie pour le mathématicien au fait d'utiliser un ensemble de concepts, de méthodes, de théories mathématiques qui vont permettre de décrire, comprendre et prévoir l'évolution de phénomènes externes aux mathématiques.

Les mathématiques et le monde réel, une longue histoire

La compétence « Modéliser » est, parmi les compétences travaillées, celle qui aborde de front le lien des mathématiques avec un extérieur à la discipline. Définir précisément cet extérieur n'est pas chose aisée, car il n'est pas certain qu'on puisse simplement l'envisager ou le nommer sans disposer déjà d'un minimum de concepts, de théories, de modèles déjà plus ou moins liés aux mathématiques. Ceci étant, quel que soit le terme utilisé (monde naturel, monde empirique, réalité extérieure, monde réel, référence, contexte), la modélisation fait intervenir un élément non mathématique au début et à la fin du processus. On peut en effet décrire de manière schématique le processus de modélisation en distinguant trois temps : la mise au point d'un modèle à partir du réel, le fonctionnement du modèle lui-même à l'intérieur des mathématiques, et la confrontation des résultats du modèle au réel[1].

Ainsi décrite, on peut remarquer que cette compétence de modélisation n'est pas développée qu'à partir du cycle 4. Dès le cycle 2, la simple reconnaissance des formes géométriques dans les objets réels ressortit à la première étape de la modélisation (« le rectangle modélise le terrain sur lequel on veut construire une maison »). Reproduire et transformer les figures obtenues relève alors de la deuxième étape. Quant à la troisième étape, elle est également présente, même si les situations modélisées restent modestes. C'est véritablement aux cycles 3 et 4 que les trois phases de la modélisation vont pouvoir progressivement gagner en ampleur. La première phase devient l'objet d'un véritable choix pour l'élève, qui dispose de différents modèles parmi lesquels il lui revient de déterminer quel est le plus pertinent (« s'agit-il ou non d'une situation où le modèle proportionnel s'applique ? »). Ce qui change est donc en premier lieu la diversité des modèles disponibles que l'élève peut convoquer pour décrire une situation, au travers par exemple de l'apparition des modèles probabilistes et fonctionnels. Mais c'est aussi et surtout la complexification de ces modèles qui va permettre à la deuxième phase de gagner en ampleur. Le rectangle qui modélise le terrain est toujours aussi pertinent, mais le modèle dans lequel il s'insère s'est profondément transformé entre le cycle 2 et le cycle 4. Ce rectangle est à présent lié à des propriétés de figures, à de nouvelles possibilités de calculs (par exemple la longueur de la diagonale par le théorème de Pythagore), à des concepts comme l'aire ou le périmètre qui ouvrent de nouveaux champs de questions,

1. Dans une version plus élaborée, cette dernière phase boucle sur la première, en construisant une version améliorée du modèle.

à une possibilité de faire évoluer le modèle suivant des contraintes par le biais de l'algèbre, puis du langage fonctionnel (« un côté doit être le double de l'autre, l'aire doit être fixée… »). Cette complexification des modèles utilisés rend nécessaire de faire travailler les élèves, dans un premier temps, sur des exercices internes au modèle en tant que tel (exercices de probabilités, exercices sur les fonctions) pour en comprendre la logique interne et en maitriser l'usage avant de l'utiliser comme outil de traitement d'un problème externe.

L'apparent paradoxe du cycle 4 est ainsi que le développement de la compétence « Modéliser » fait passer une compréhension plus fine du réel par un progrès dans les capacités d'abstraction des élèves. Ainsi, c'est par une conceptualisation et une formalisation de la notion naturelle de « chance » en termes de probabilités que l'on parvient à modéliser les situations dépendant du hasard. Paradoxe apparent qui est au cœur du progrès du savoir mathématique, la plus grande abstraction allant de pair avec la plus grande capacité de rendre compte de la complexité du réel. Pour des élèves à qui on demande un effort d'abstraction et de manipulation de concepts, il est important de connaitre et d'éprouver régulièrement l'efficacité des outils qu'ils apprennent à maitriser, au travers en particulier de cette troisième phase de confrontation des résultats du modèle avec la réalité empirique. Entretenir la compétence « Modéliser », c'est aussi entretenir la confiance que les élèves ont dans l'enseignement qui leur est proposé : découvrir qu'un modèle géométrique permet de donner une bonne approximation du rayon de la Terre fait partie de ces expériences qui contribuent à façonner auprès de l'élève de collège une image positive et utile des mathématiques.

Lire le grand livre de l'Univers : mathématiques et sciences

Parce qu'elle a trait au réel, la compétence « Modéliser » rencontre naturellement les disciplines dont le principe même est la compréhension du monde naturel : les sciences, qu'elles soient physiques, technologiques ou sciences du vivant. Mais qu'ont à dire de spécifique les mathématiques dans une affaire où elles peuvent n'apparaitre que comme un outil ? Il faut ici relire la phrase célèbre de Galilée[2] :

> La philosophie est écrite dans ce livre gigantesque qui est continuellement ouvert à nos yeux (je parle de l'Univers), mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique, et les caractères sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques, sans lesquelles il est impossible d'y comprendre un mot. Dépourvu de ces moyens, on erre vainement dans un labyrinthe obscur.

Amener les élèves à comprendre et parler ce langage, voilà l'une des contributions des mathématiques au développement de la pensée scientifique des élèves de collège. Ce langage est d'abord composé de nombres et de figures, présents dès le cycle 2 : « comprendre le système de numération », « reconnaitre des formes dans les objets réels » sont des objectifs du programme de mathématiques. Mais il s'enrichit au cycle 4 des symboles et de la syntaxe algébriques. C'est bien par la part prise par le calcul littéral que le cycle 4 marque une nouvelle étape dans l'apprentissage de la lecture de l'univers. Et avant le calcul lui-même, l'utilisation de l'écriture littérale constitue l'un des enjeux, « Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables » indique le programme, qui invite à multiplier les références aux sciences. Quant au calcul

2. Galileo Galilei (1623). Il Saggiatore traduction française de Christiane Chauviré, L'Essayeur, Les Belles-Lettres, Paris, 1980.

algébrique, c'est l'un des objectifs du cycle 4 que de permettre aux élèves d'en découvrir progressivement la puissance en termes d'abstraction, de généralisation et d'automatisation des calculs, en particulier au travers de problèmes du premier degré.

De la quatrième proportionnelle aux fonctions linéaires

Le modèle proportionnel, déjà présent au cycle 3, évolue au cycle 4 dans le sens d'une plus grande abstraction. Les situations à modéliser diffèrent peu, mais c'est le traitement mathématique de la modélisation qui évolue. Au travers d'un plus grand nombre de registres (graphiques, tableaux, coefficient multiplicateur, formule) et au travers d'une utilisation plus fine des propriétés de linéarité sous-jacentes à la situation de proportionnalité, pour aboutir enfin à la notion complètement décontextualisée de fonction linéaire où dans la formule $f(x) = ax$, ni a ni x ne renvoient nécessairement à un élément du monde réel. Dans ce parcours, c'est véritablement l'activité intra mathématique de création de concepts qui est à l'œuvre, permettant de faire naitre un objet, la fonction linéaire, dont le caractère dégagé de tout lien avec un contexte donné multiplie la puissance de modélisation (ne serait-ce que par la capacité d'automatiser les calculs). Faire percevoir aux élèves le gain réalisé au prix de l'effort d'abstraction doit être là encore une préoccupation de l'enseignant face à l'élève qui peut demander pourquoi on ne se contente pas des tableaux qui ont fait leurs preuves.

Probabilités

« Aborder les questions relatives au hasard à l'aide de problèmes simples » est un des objectifs du programme de cycle 4. Pour autant, la simplicité des problèmes ne doit pas cacher la complexité du modèle proposé. Il convient de ne pas précipiter le passage au modèle probabiliste et aux calculs à l'intérieur de ce modèle, et il convient surtout de ne pas prendre les calculs menés à l'intérieur du modèle pour des preuves ou des démonstrations de phénomènes réels. On ne prouve pas que « le dé est truqué », ou qu' « il vaut mieux miser sur l'obtention d'un 7 comme somme de deux dés que sur l'obtention d'un 2 », mais on effectue des calculs à l'intérieur du modèle mathématique qui aboutissent à une conclusion mathématique rigoureuse. Les conclusions que l'on peut en tirer quant aux dés réels ou aux paris réels ne relèvent pas des mathématiques et doivent être considérées avec recul et prudence. Pour reprendre la phrase radicale d'Einstein, *« Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité »*. L'utilisation du modèle probabiliste est une grille de lecture de la réalité, et son rapport avec le réel n'est pas le même que celui d'une théorie physique. L'affirmation « une pièce équilibrée a autant de chances de tomber sur pile ou sur face » n'est pas de même nature que « l'eau bout à 100 degrés » ou « il se forme un précipité rouge en présence de cuivre ». Une conséquence pratique de cette distinction tient dans la nécessité pour les enseignants de bien marquer la différence entre ce qui tient de l'observation (statistique) et ce qui tient de la modélisation théorique en privilégiant un vocabulaire du type « on décide que », « on modélise par » plutôt que « on voit que ». Parce qu'il rend compte de l'activité humaine, parce qu'il peut appuyer des décisions collectives ou des choix politiques, le modèle probabiliste doit plus que d'autres faire l'objet d'une sensibilisation des élèves à la prudence méthodologique.

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre !

La géométrie des figures, déjà évoquée, gagne elle aussi en abstraction au cycle 4 en s'éloignant de l'expérience sensible. Ce sont des triangles qu'on tenait auparavant dans la main après les avoir découpés et qui tiennent à présent tout entier dans les trois lettres ABC. Ce sont des solides qu'on va pouvoir décrire par des vues de coupes, des représentations en perspective sans les avoir matériellement sous les yeux. Ce travail progressif d'abstraction,

qui ne peut s'envisager au cycle 4 sans aller-retour avec la matérialité des solides concrets, ouvre non seulement la voie vers le raisonnement déductif, mais aussi vers la modélisation géométrique de l'espace. Cette modélisation de l'espace se manifeste au cycle 4 en particulier dans le repérage sur la sphère terrestre mais aussi au travers des calculs que cette modélisation permet (estimation du rayon de la terre et de la distance de la terre à la lune).

Mais cette géométrie de l'espace marque également profondément l'art, depuis les proportions des temples grecs jusqu'aux architectures contemporaines en passant par la révolution cézanienne : « *Permettez-moi de vous répéter ce que je vous disais ici : traitez la nature par le cylindre, la sphère, le cône [...]* »[3] et au-delà. C'est peut-être au cœur du plaisir esthétique, des notions d'harmonie et de symétrie, que le passage progressif à une géométrie des propriétés et des rapports trouve une de ses récompenses les plus précieuses : au travers de quelques tracés sur une toile de Leonard de Vinci, ou par l'imposition de transformations bien choisies sur une frise du palais de l'Alhambra, les mathématiques apportent leur concours à la compréhension des règles de l'art.

La modélisation au risque du projet

La modélisation, si on souhaite permettre aux élèves d'en comprendre les enjeux, nécessite dans l'idéal de partir d'un problème extra-mathématique, de construire un modèle, de le faire fonctionner et de pouvoir confronter ses résultats à la situation modélisée. Deux écueils apparaissent immédiatement :

- le temps nécessaire pour laisser les élèves réfléchir, émettre et confronter des hypothèses peut dépasser le cadre de la séance ;
- les modèles mathématiques permettant de rendre compte de situations réelles peuvent apparaitre comme hors de portée des élèves de collège.

Face à ces deux difficultés, deux possibilités s'offrent, qu'il convient de combiner car elles ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients.

La première piste consiste pour l'enseignant à prendre en charge une partie de la modélisation en présentant une situation déjà simplifiée, voire en partie modélisée. Cette possibilité a l'avantage de diminuer fortement le temps nécessaire pour appréhender la situation et de proposer un cadre où l'on sait que l'élève a les moyens d'effectuer un travail de modélisation. Elle peut toutefois conduire à des situations tellement artificielles et caricaturales qu'elles finissent par ne plus rien modéliser. Il est donc important de présenter aux élèves les raisons qui ont présidé au choix du modèle, de les amener à le critiquer de manière argumentée, et d'évoquer lorsque cela est possible des outils et des concepts qu'ils rencontreront plus tard et qui permettront d'améliorer le modèle.

La deuxième piste consiste à garder l'idée de la confrontation à la complexité du réel en pariant sur le temps long du projet, que ce soit au sein du cours de mathématiques ou dans le cadre d'un EPI. Si cette modalité constitue pour le développement de la compétence « modéliser » un terrain a priori idéal, il faut cependant garder à l'esprit les risques inhérents à la conduite des projets, que nous rappelle un chercheur comme Jean-Yves Rochex[4] :

3. Paul Cézanne, Lettre à Émile Bernard, 15 avril 1904.

4. Extrait de l'audition au CSE du 6 janvier 2015, reprise dans le rapport de l'Inspection générale Grande pauvreté et réussite éducative (J.P. Delahaye, mai 2015)

> [...] la question n'est pas simplement de savoir si nous sommes en mesure de proposer des projets et des activités attractives pour les élèves, mais aussi de savoir si ces activités sont productrices d'apprentissages et de dispositions durables, qui restent une fois le projet accompli, une fois le spectacle donné [...].Comment veiller à ce que la réalisation d'un projet collectif ne se concrétise pas par une division sociale du travail entre élèves, qui spécialise les élèves les plus faibles dans les tâches les moins intéressantes sur le plan intellectuel, les élèves les plus performants dans les tâches les plus intéressantes ?

Ces points de vigilance étant posés, il apparait indispensable de demander aux élèves un retour réflexif régulier sur les mathématiques rencontrées (quelles notions mathématiques, connues ou inconnues ai-je rencontrées ?) et au moins en fin de projet, de garder un temps de reprise et d'institutionnalisation par l'enseignant des concepts mathématiques à l'œuvre, afin que, pour tous les élèves, les éléments de savoir mathématique qui sous-tendent la modélisation apparaissent clairement, dégagés de la multiplicité d'expériences, de souvenirs, de sensations qui constituent pour eux la trace sensible du projet.

Décrire le monde : un enjeu au carrefour des domaines du socle

La compétence « Modéliser » constitue pour l'élève de cycle 4 un enjeu qui rencontre les 5 domaines du socle : elle illustre la puissance du langage mathématique dans sa capacité de mise en ordre et de description du monde, elle constitue une mise en œuvre des méthodes mathématiques de raisonnement hypothético-déductif, elle participe à la formation d'un citoyen éclairé, elle constitue le langage des grands systèmes scientifiques, et elle représente, notamment au travers de la géométrie et des probabilités, un outil indispensable de compréhension de l'activité humaine.

Cette omniprésence ne rend pas pour autant facile pour les élèves la maitrise de cette compétence, qui peut être cachée dans la diversité des activités mathématiques. Il revient à l'enseignant, au-delà des projets, des EPI, des exercices quotidiens, de mettre au jour les modalités, la puissance et les limites de la modélisation mathématique.

Bibliographie et sitographie

- De la modélisation du monde au monde des modèles (1) et (2) : Le délicat rapport « mathématique-réalité » et Des statistiques aux probabilités - DUPERRET,J.-C. (2012). Bulletins verts de l'AMPEP 484 et 486.
- Site du Projet européen Lema (Learning and Education in and through Modelling and Applications).
- Interdisciplinarité et modélisation, un atout et un défi pour l'enseignement des mathématiques - ARTIGUE, M. (2016), séminaire de l'IREM Paris 7.







Représenter

Donner à voir les objets mathématiques

« Représenter », c'est donner à voir, ou au moins rendre perceptible à la vue et à l'esprit. Cette définition relativement simple recouvre cependant des réalités bien distinctes. « Représenter » des objets, des visages ou en tout cas des formes ou des solides est un premier niveau de représentation commun entre autres aux mathématiques, à la géographie, aux sciences et aux arts. Mais on peut aussi « Représenter » des relations entre les objets, que ce soit par un croquis de géographie, un codage en géométrie ou un schéma en électricité. Et il arrive enfin qu'on doive « représenter » des entités abstraites, qui n'ont pas d'autre mode d'existence que cette représentation : des nombres décimaux, des fractions, des fonctions, en un mot des objets mathématiques. Leur point commun est de ne pas être accessible par la vue, l'ouïe ou quelque autre sens : on ne peut pas montrer dans le monde extérieur une fonction, pas plus qu'on ne peut en fait montrer un cube, ou un cercle. Pour autant, l'existence de ces objets ne fait de doute pour aucun utilisateur des mathématiques, même occasionnel. Ces objets ne sont pas accessibles en eux-mêmes, seulement par leurs représentations, qui sont comme des chemins vers un objet auquel on ne pourrait pas avoir directement accès. Ces représentations diverses peuvent alors appartenir à différents registres : registre graphique, registre du langage naturel (« un parallélépipède à 6 faces »), registre numérique, registre de l'écriture symbolique, etc.

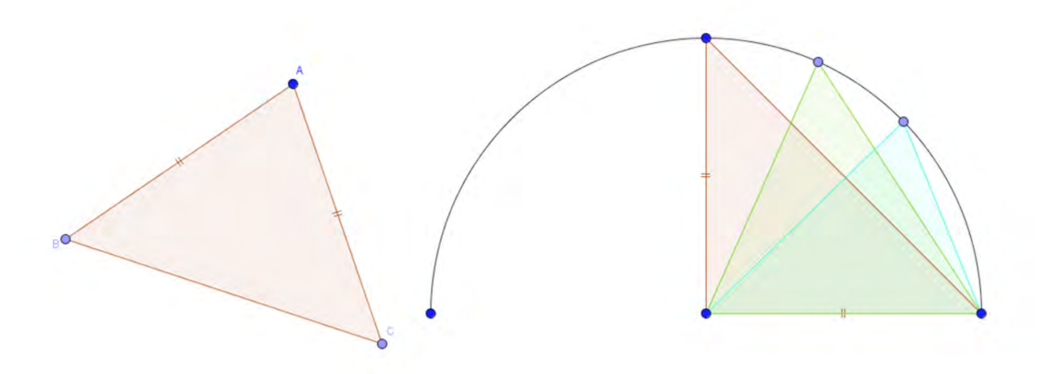
Le développement de la compétence « Représenter » au cycle 4 doit à la fois permettre à l'élève de progresser dans la vision du réel et dans l'appréhension des objets mathématiques abstraits. Comprendre ce qu'est un triangle, ce qu'est une fonction, ce qu'est une fraction, c'est savoir « représenter » ces objets, c'est-à-dire trouver un registre de représentation adéquat, mais aussi savoir varier les représentations et les registres de représentation. Un élève capable de convoquer dans un exercice mettant en jeu une fonction un graphique, un tableau de nombres, une écriture symbolique, est en train de s'approprier la notion de fonction. Dans cet exercice, on voit que la représentation est aussi pensée de manière dynamique, dans sa capacité à engendrer d'autres représentations, à l'intérieur d'un même registre ou dans un autre registre.

> « Mais surtout, l'activité mathématique de recherche et de preuve consiste à transformer des représentations [...], données dans le contexte d'un problème posé, en d'autres représentations sémiotiques. Et, de ce point de vue, une représentation [...] n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation, et non pas en fonction de l'objet qu'elle représente ».[1]

1. Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques – Raymond Duval - 2011.

Si on poursuit l'analyse, on peut remarquer que les différentes représentations de la fonction traitée dans cet exercice ne la concernent pas en tant qu'objet spécifique (la fonction f de l'exercice), mais s'appliquent à une catégorie plus vaste à laquelle elle est rattachée (ici la catégorie des fonctions)[2].

Par ailleurs, si pour cerner un objet mathématique, il est nécessaire de varier les registres, pour résoudre un problème, il est souvent pertinent de se placer dans un domaine mathématique qui n'est pas nécessairement celui de l'énoncé : on parlera alors de changement de cadre. Ainsi, le problème du maximum de l'aire d'un triangle isocèle de côté 6, posé dans le cadre géométrique à partir d'une figure, pourra être traité dans ce cadre géométrique (en considérant un cercle bien choisi), ou dans un cadre fonctionnel, lui-même pouvant être associé à un registre numérique (des valeurs approchées de l'aire étant obtenues à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou d'un tableur) ou plus tard, au lycée au registre des écritures symboliques.



Le signe et la pensée

Le premier des modes de représentation, avant même la figure est le signe : lettre, symbole, chiffre, cette mise en forme des idées mathématiques est aussi essentielle aux mathématiques que les pièces du jeu le sont aux échecs. Mais ces formes, ces lettres qui constituent la langue des idées ont elles-mêmes une forme, parfois un sens comme le rappelle le logicien Frege[3] :

> « En offrant au regard le signe d'une représentation, elle-même appelée à la conscience par une perception, on crée un foyer stable autour duquel s'assemblent d'autres représentations. Parmi celles-ci, on en pourra de nouveau choisir une et offrir au regard son signe. Ainsi pénétrons-nous pas à pas dans le monde intérieur des représentations, et y évoluons nous à notre gré, usant du sensible nous-mêmes pour nous libérer de sa contrainte ».

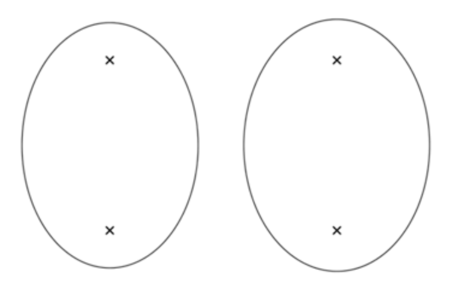
Le philosophe pointe ici la force et le risque du signe : il est utile par les images qu'il convoque et les actions qu'il permet, mais il peut engendrer aussi de fausses images : le nombre a qui

2. Parmi les grandes catégories d'objets mathématiques utilisés au cycle 4, on peut citer les nombres rationnels, les fonctions, les figures géométriques du plan ou de l'espace, les symboles littéraux. Ces grandes catégories sont reliées aux classes de problèmes qu'elles permettent de résoudre (proportionnalité, dépendance d'une grandeur en fonction d'une autre, modélisation géométrique, résolution d'équations, etc.).

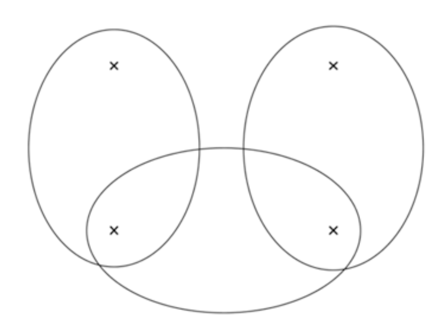
3. Que la science justifie un recours à l'idéographie, 1882, in Ecrits logiques et philosophiques, trad. C. Imbert, Seuil, 1971.

ne peut être que positif, le nombre n qui ne peut être qu'entier, la bande numérique où un nombre est toujours plus petit que celui qui est à sa droite. Une représentation peut posséder pour l'élève une logique qui diffère de celle que l'enseignant lui associe. Que l'on pense à ce dialogue imaginaire de L. Wittgenstein[4] :

« Il me suffit simplement de regarder la figure pour voir que 2+2=4 »



« Alors il me suffit simplement de regarder la figure pour voir que 2+2+2=4 »



Un autre problème apparait ici, plus large que celui de la nécessaire variation des représentations, c'est la question de la bonne compréhension de la représentation par l'élève : comment savoir que l'élève a bien compris l'usage de la représentation, par exemple qu'il distingue bien les objets visés par les deux représentations 1,4 et ¼. Une réponse possible consiste à faire verbaliser par l'élève sa perception de la représentation, en passant donc dans le registre du langage naturel : la verbalisation peut alors se faire sous la forme : « 1,4 représente une unité et quatre dixièmes, ou quatorze dixièmes ; on peut également la représenter par 1+ 4/10, ou 14/10 ; ¼ représente le quart de l'unité ». La stabilisation de la compréhension de l'objet mathématique sous-jacent passe par l'utilisation de ses différentes représentations dans des contextes différents, pour résoudre des problèmes variés, et le passage d'un registre de représentation à un autre en précisant l'intérêt de chacun dans la situation proposée (représenter le nombre 1,4 sur une droite graduée, partager un segment en quatre, poser l'équation à trou … x 4 = 1).

Changements de registre : l'apport des outils numériques

L'usage des outils numériques facilite la mise en œuvre concrète des changements de registre de représentation, que ce soit grâce aux tableurs ou aux logiciels de géométrie dynamique : définir une fonction par une formule déclenche aussitôt le tracé des graphiques, ou l'apparition d'un tableau de valeurs. À l'inverse, un tableau de valeurs permet de placer des points, de proposer une interpolation, une ou plusieurs formules.

4. *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Paris, Gallimard, coll. Bibliothèque de philosophie.

Ce changement de registre se trouve d'autant facilité qu'il s'effectue immédiatement et sans effort. Mais cette simultanéité ne doit pas conduire à penser que la conversion est limpide pour les élèves. Si les outils numériques permettent d'automatiser des processus mentaux, ceux-ci doivent avoir été auparavant compris et d'une certaine manière éprouvés par les élèves (par le calcul mental ou posé, par le dessin à l'aide d'instruments de géométrie, etc.).

Nombres

Les nombres constituent un des points les plus délicats et les moins immédiatement visibles de l'application des changements de registre. C'est au cycle 4 que ce qui était représenté par des parts de gâteau, un point sur la demi-droite graduée, le résultat d'une opération de division doit pouvoir pour l'élève renvoyer à un même objet : un nombre. Cette possibilité de changement de registre doit être mise en œuvre régulièrement car elle ne revêt pas la même facilité selon qu'il s'agit de 2, de 0,5, de 3/4, de 2/3, de 5/3 (la représentation des parts de gâteau peut être un obstacle à la conception d'une fraction supérieure à 1). La compréhension d'un nombre décimal, plus tard d'un nombre rationnel positif ou négatif ne peut s'envisager sans changement de registre, d'autant que tous les registres ne seront pas aussi pertinents pour un élève : envisager 2/3 comme représentation de deux parts d'un tout partagé en trois est une chose naturelle pour l'élève depuis le cycle 3, mais le cycle 4 va fournir de nouveaux outils permettant de le voir comme un point de la droite graduée. Des calculs de rapports et de proportions, la résolution de l'opération à trou 2 x ... = 3, puis celle de l'équation $2x = 3$, le théorème de Thalès viendront progressivement conforter cette réalité. Les activités de calcul mental, les activités de calcul dans un contexte géométrique ou dans un contexte arithmétique constituent autant d'occasions de rappeler et de consolider la variété de ces représentations du nombre. Comprendre que la notion de nombre rationnel étend celle de nombre décimal, qui elle-même étend celle de nombre entier fait partie des objectifs du cycle 4. Les écritures et les représentations des nombres doivent être revues et mises en jeu tout au long du cycle.

Organisation et gestion de données et fonction

La représentation joue dans l'organisation et la gestion de données un rôle particulier. Il s'agit de représenter des séries de nombres, objets abstraits pour lesquels toutes les représentations sont mathématiquement équivalentes. Mais du fait que ces séries de nombres ont un lien fort avec le monde réel, ces représentations ne sont pas du tout équivalentes dans l'effet qu'elles produisent. Le choix d'une représentation (diagramme en barres ou camembert), comme celui d'une échelle peuvent majorer un minorer un phénomène, exagérer ou minorer un écart, éclairer une décision ou tromper un lecteur. Le nécessaire travail sur les registres prend ici un relief particulier, en ce qu'il rencontre la formation du citoyen et accompagne le développement de l'esprit critique. Dans cet esprit, tout travail engagé sur des données réelles, notamment dans le cadre d'un EPI, permet de mettre en lumière les enjeux des choix de représentation. La notion de fonction, qui nait véritablement pour les élèves au cycle 4, continuera à se mettre en place au lycée et même au-delà. Les fonctions font en effet partie de ces objets mathématiques que les élèves vont être amenés à manier pendant longtemps sans en avoir une définition formelle rigoureuse. Le changement de registre de représentations est donc ici nécessaire pour cerner l'objet fonction. On ne peut pas dire ce qu'est une fonction, *mais on peut dire, grâce à cette formule, j'ai défini une fonction, que je pourrais aussi définir par une courbe.*

Représenter en géométrie

La compétence « Représenter » reste bien entendu centrale dans l'étude de la géométrie. Le thème « Espace et géométrie » propose sous le titre Représenter l'espace une série de contenus dont la maitrise permet à l'élève de collège de continuer à progresser dans la compréhension des objets qu'il a sous les yeux, au travers de la perspective, mais aussi d'objets qu'il ne peut embrasser du regard : c'est tout l'enjeu de la représentation de la Terre, du repérage sur la sphère, dans l'espace ou dans le plan. La circulation entre les différents registres (maquettes, vues de dessus et de profil, croquis, patrons, modélisations 3D issues de logiciels de géométrie, objets conçus à l'aide d'une imprimante 3D) doit être travaillée tout au long du cycle.

La représentation en géométrie ne se cantonne pas à ce lien avec le réel, mais accompagne la maitrise de l'abstraction et les débuts de la démonstration au travers des figures et de leurs codages, et des transformations. On retrouve cet « Art de raisonner juste sur des figures fausses » pour reprendre la formule de Descartes. Un triangle isocèle peut être représenté par une figure représentant un triangle isocèle ou un triangle quelconque bien codé, par l'expression *Soit ABC un triangle isocèle*. Cette possibilité peut être source de difficulté pour des élèves à qui parallèlement on demande de travailler sur la vérité et la justesse des représentations au travers de représentations en perspectives ou à l'échelle. La notion de schéma constitue pour les élèves un pas important à bien marquer, où on s'attache à montrer que la force du schéma réside dans sa capacité à condenser les éléments nécessaires à la démonstration.

Bibliographie

- Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques - DUVAL R. (2011).
- Rationnels et proportionnalité, complexité et enseignement au début du collège - ADJIAGE R. (2007). Revue Petit x 74 IREM Grenoble
- Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique - BARRERA R. (2011). Revue Petit x 85 IREM Grenoble
- Représentation des fractions et des nombres décimaux chez les élèves de CM2 et du collège - PERRIN-GLORIAN (1986). Revue Petit x 10 IREM Grenoble



MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE, DE
L'ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE





Raisonner

Le programme de mathématiques du cycle 4 offre une place de choix à la compétence « raisonner » dans laquelle il regroupe les démarches suivantes :

- résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions ;
- mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ;
- démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion ;
- fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.

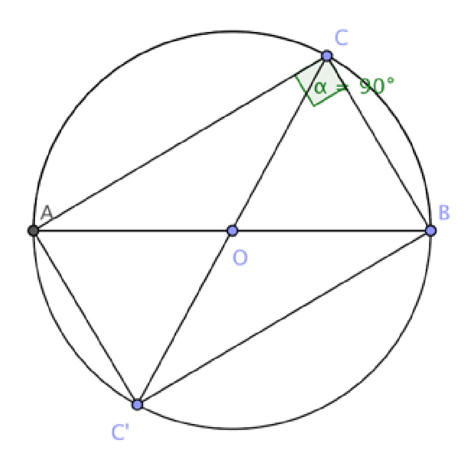
Chacune des étapes de résolution d'un problème (compréhension de l'énoncé et de la consigne, recherche, production et rédaction d'une solution) fait appel au raisonnement, processus mental permettant d'effectuer des inférences. Rappelons qu'une inférence est une opération mentale par laquelle on accepte qu'une proposition soit vraie en vertu de sa liaison avec d'autres propositions. Les phases de recherche, de production et de rédaction de preuve font appel à des raisonnements de différentes natures.

Les raisonnements inductifs et abductifs, essentiellement mis en œuvre dans la phase de recherche, permettent d'aboutir à l'émission de conjectures qu'il s'agira ensuite de valider ou d'invalider. Si la production d'un contre-exemple suffit à invalider une conjecture, sa validation repose sur une démonstration, moyen mathématique d'accès à la vérité. On rappelle que « démontrer », c'est « donner à voir » les différentes étapes d'une preuve par la présentation, rédigée sous forme déductive, des liens logiques qui la sous-tendent.

Le raisonnement inductif consiste à généraliser une propriété observée sur des cas particuliers. Il fonctionne selon le schéma suivant : constatant sur des exemples que, lorsque A est vraie, alors B est vraie, on émet la conjecture que (A implique B) est vraie.

Le raisonnement abductif consiste à présumer une cause plausible d'un résultat observé. Il fonctionne selon le schéma suivant : pour démontrer que B est vraie, sachant que (A implique B) est vraie, on va démontrer que A est vraie. Le raisonnement abductif est notamment utilisé sous forme d'une analyse remontante, encore appelé chaînage arrière, qui consiste, à partir du résultat que l'on veut démontrer, à repérer une ou plusieurs propriétés (conditions suffisantes) qui, si elle(s) étaient établie(s), permettrai(en)t d'atteindre le résultat par application d'un théorème identifié. On substitue alors momentanément au problème de départ un (ou plusieurs) nouveau(x) problème(s) consistant à établir ces conditions intermédiaires.

Exemple : ABC est un triangle rectangle en C. On veut démontrer que C appartient au cercle de diamètre [AB].
On note O le milieu de [AB] et on remplace la proposition à démontrer par l'égalité OA=OB=OC ; pour atteindre ce résultat, on construit le symétrique C' de C par rapport à O. Selon le principe du chaînage arrière, il suffit alors de montrer que AC'BC est un rectangle.

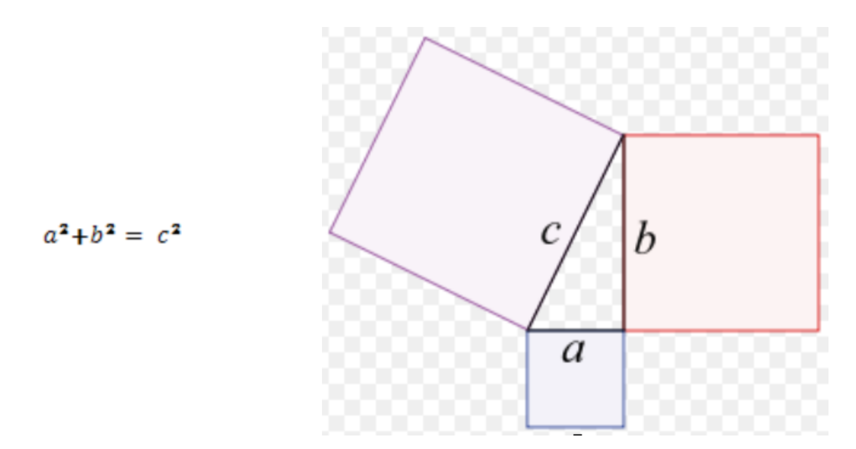


Par la diversité et la multiplicité des situations particulières qu'elle permet d'observer, l'utilisation d'outils logiciels (de géométrie, de calcul, de simulation, de programmation) est un support aux raisonnements inductifs et abductifs et favorise la formulation de conjectures. Il est important de faire comprendre aux élèves le caractère incertain de toute conjecture et la nécessité, soit de l'invalider par la production d'un contre-exemple, soit de prouver sa vérité par une démonstration.

Celle-ci fait appel au raisonnement déductif qui (entre autres) s'appuie sur :

- la **déduction** proprement dite (ou règle de détachement ou *modus ponens*), qui fonctionne selon le schéma suivant : sachant que (A implique B) est vraie et que A est vraie, on conclut que B est vraie. Le premier pas d'une déduction consiste à reconnaître une situation de référence A (une configuration géométrique, une situation de proportionnalité, une propriété de nombres, etc.) ; le second consiste à appliquer le théorème qui stipule que (A implique B) ;
- la **disjonction de cas**, qui fonctionne selon le schéma suivant : pour montrer que (A implique B), on sépare l'hypothèse A de départ en différents cas recouvrant toutes les possibilités et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas ;
- Le raisonnement par **l'absurde** (*reductio ad absurbum*) qui fonctionne selon le schéma suivant : pour montrer que A est vraie, on suppose qu'elle est fausse et par déduction on aboutit à une absurdité.

Afin de convaincre les élèves du rôle de la démonstration en mathématiques comme moyen d'accès à la vérité, il importe de leur apprendre à distinguer une propriété conjecturée ou vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. Pour ce faire, le terme de « démonstration » ne doit pas être galvaudé et la seule illustration d'un raisonnement ne saurait être désignée comme telle. Par exemple, si l'illustration présentée ci-dessous constitue une image mentale pertinente de l'égalité entre l'aire du carré construit sur l'hypoténuse et la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit, elle ne saurait être présentée comme une démonstration du théorème de Pythagore.



En revanche, certains théorèmes, énoncés de manière générale peuvent être démontrés uniquement sur des exemples choisis parce qu'ils donnent une bonne idée du cas général (on dit alors qu'ils sont « génériques »). Cela peut être par exemple le cas pour la démonstration des propriétés des opérations sur les fractions.

De même, il convient de systématiquement qualifier les énoncés mathématiques selon leur statut, en distinguant définitions, théorèmes admis et théorèmes démontrés. Les théorèmes traduisant une propriété caractéristique pourront être formulés en distinguant dans leur énoncé le sens direct et le sens réciproque.

Les notions mathématiques qui figurent au programme du cycle 4 offrent toutes des possibilités de raisonnement, soit dans l'accès à la preuve d'un énoncé, soit dans son utilisation. Il n'est pas question de démontrer tous les théorèmes ou propriétés figurant au programme, mais de déterminer en équipe pédagogique les démonstrations qui seront retenues sur toute la durée du cycle en raison de leur caractère formateur, de leur accessibilité aux élèves et de l'intérêt qu'elles présentent pour faciliter l'accès au sens des notions mises en jeu.

L'apprentissage du raisonnement et de la démonstration est un processus long et délicat qui doit se faire de manière progressive, dans la durée, et tenir compte des deux contraintes suivantes :

- tout d'abord, la nécessité de séparer les tâches de résolution du problème (recherche et obtention de la preuve) de celle de la rédaction d'un texte qui traduit l'organisation de la démonstration ;
- ensuite, l'apprentissage de la rédaction se fait notamment lorsque l'élève est confronté à l'expérience de la communication de sa solution. L'envie de se faire comprendre associée à la critique de ses pairs est, pour un élève, un levier de progrès certainement plus puissant que la fourniture, par le professeur, d'un modèle de rédaction. Si, pour être communicable et compréhensible, une démonstration mathématique doit respecter des règles syntaxiques, il faut reconnaître que celles-ci ne sont pas naturelles pour les élèves. Des exigences excessives et prématurées d'un modèle de rédaction standardisée peuvent induire de leur part







des comportements relevant de l'imitation plus que de la compréhension. En accordant une place disproportionnée aux activités purement formelles de nature rhétorique (« je sais que… or… donc »), on risque d'éloigner les élèves du raisonnement lui-même et du plaisir de chercher. Afin de ne pas détourner de la résolution de problèmes les élèves ayant des difficultés à entrer dans les codes de rédaction d'une démonstration, il importe de valoriser les productions spontanées, écrites ou orales, issues des phases de recherche et d'expérimentation (calculs seuls, croquis destinés à comprendre l'exercice, idées de preuve, plan de preuve, etc.). Souvent imparfaites et inabouties, elles constituent de véritables objets d'étude pour la classe au cours d'un débat permettant de faire émerger progressivement les critères d'une rédaction performante, sans pour autant modéliser le travail. Progressivement, la phase de rédaction, entamée ou non en classe, sera dévolue aux élèves, en classe ou en dehors de la classe, en veillant à différencier les exigences de formalisme selon l'objectif d'apprentissage (le raisonnement ou la communication) et la capacité des élèves à entrer dans les codes de la démonstration. En particulier, il est tout à fait possible d'exprimer dans le langage naturel un raisonnement mathématique tout en respectant parfaitement les règles logiques d'inférence. De même, si l'on peut faire apparaître, dans certains cas, l'intérêt d'une mise en forme de la démonstration sous forme déductive (en mettant la conclusion à la fin de la démonstration), il est cependant admis de la placer au début, suivie de « car…, parce que… et que… ».

Il importe également de ne pas cantonner la démarche de raisonnement à sa seule forme déductive et de ne pas la limiter à un thème particulier des mathématiques (traditionnellement celui de géométrie), mais bien de la placer au cœur de toute activité mathématique.

Les situations proposées doivent donc ménager à la fois des temps de recherche et d'expérimentation permettant de formuler des conjectures, des temps de mise en commun et d'argumentation permettant de produire une preuve et des temps de mise en forme (démonstrations rédigées). Pour solliciter la curiosité de l'élève, susciter chez lui l'envie de relever un défi intellectuel et motiver sa recherche, il est souhaitable que l'énoncé du problème soit assez bref et facile à comprendre et qu'il n'induise ni une solution ni même une méthode de résolution ; un moyen de laisser à chaque élève l'initiative de sa démarche consiste à limiter les questions intermédiaires ou celles dont l'énoncé mentionne ce qu'il s'agit de trouver (« démontrer que… »). Cette attention particulière devrait permettre à chaque élève de démarrer sa recherche par des tâtonnements, des dessins, des essais numériques, avec ou sans l'aide de logiciels. Les problèmes dont la solution est accessible par plusieurs modes de raisonnement (algébrique, géométrique, etc.) sont particulièrement intéressants.

Exemples de problèmes

Ci-dessous quelques exemples de problèmes sont proposés, rattachés à différents thèmes du programme, et mettant en œuvre des raisonnements de types varié

Ecriture décimale [5e]

Exemple de problème
Dans les écritures décimales de deux nombres entiers, le chiffre des dizaines est 7 et celui des unités est 6. Quels sont les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de leur produit ?

Commentaire
Raisonnement déductif à travers l'utilisation de l'écriture décimale.

Multiples et diviseurs

Exemple de problème
La somme des chiffres de 42 est un multiple de 6 et 42 est un multiple de 6 (idem pour 84). Peut-on affirmer que, si la somme des chiffres d'un nombre entier est un multiple de 6, alors ce nombre est un multiple de 6 ?

Commentaire
Infirmation par production d'un contre-exemple.

Proportionnalité

Exemple de problème

On augmente la longueur d'un rectangle de 10 % et on diminue sa largeur de 10 %. Comment varie son aire ?

Commentaire

L'élève peut raisonner de manière inductive en fixant des valeurs numériques pour la longueur et la largeur et faire varier ces valeurs

Raisonnement déductif par application d'un pourcentage.

Nombres décimaux

Exemple de problème

Existe-t-il un nombre décimal dont le carré est égal à 2 ?

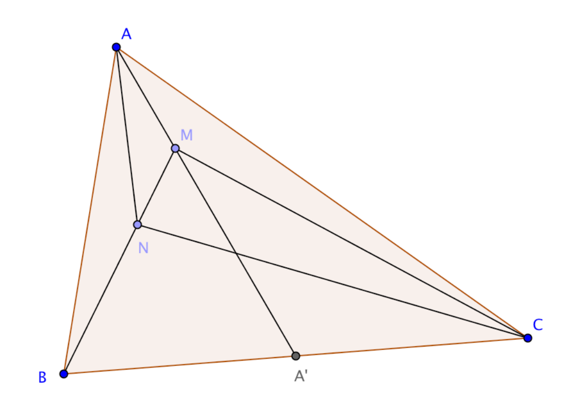
Commentaire

Une démarche inductive basée sur des essais (à la main puis à la calculatrice) permet d'émettre la conjecture qu'il n'existe pas de nombre décimal dont le carré est égal à 2.
Cette conjecture est ensuite démontrée à l'aide d'un raisonnement par l'absurde et disjonction de cas.
On montre d'abord qu'il n'existe aucun nombre entier dont le carré est égal à 2.
Puis, en distinguant les différentes valeurs qu'aurait sa dernière décimale, on montre qu'il n'existe aucun nombre décimal non entier dont le carré est égal à 2.

Utilisation des aires

Exemple de problème

Où positionner le point M à l'intérieur du triangle ABC pour que les triangles AMB et AMC aient la même aire ?



Commentaire

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet de conjecturer une condition suffisante : l'appartenance de M à la médiane [AA'].

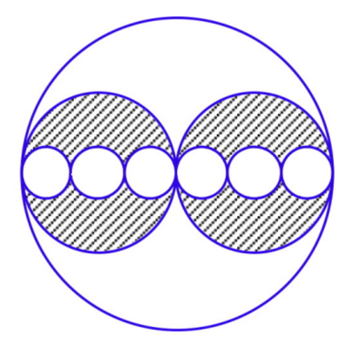
Démonstration par les aires (lemme du chevron).

Démonstration de la condition nécessaire par un raisonnement par l'absurde : on suppose que N n'appartient pas à la médiane [AA'] (en étant par exemple à l'intérieur du triangle ABA'), on note M le point d'intersection de (BN) et (AA') et on compare les aires des triangles ANB, AMB, AMC, ANC.

Fractions, aire du disque

Exemple de problème

A quelle fraction du grand disque correspondent les six petits disques ? A quelle fraction du grand disque correspond la surface hachurée ?



Commentaire

Analyse de figure.

Vitesse

Exemple de problème

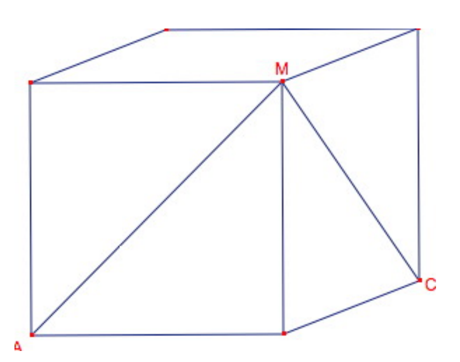
Un funiculaire monte du pied d'une colline à son sommet à la vitesse moyenne de 14 km/h.

Le conducteur peut-il régler la vitesse lors de la descente pour que la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours soit de 28 km/h ?

Géométrie dans l'espace

Exemple de problème

Sur un cube, on a tracé deux diagonales, comme indiqué sur le dessin ci-dessous. Quelle est la mesure de l'angle formé par ces deux diagonales ?



Commentaire

Identification d'une figure plane à l'intérieur d'une configuration de l'espace.

Géométrie, Équations

Exemple de problème

Deux tours, hautes de 30 et 40 mètres sont distantes l'une de l'autre de 50 mètres. Un puits est situé entre les deux tours. Deux oiseaux s'envolent en même temps du sommet de chaque tour et volent à la même vitesse en ligne droite avant de se rejoindre au sol. En quel point se rejoignent-ils ?

Commentaire

Modélisation de la situation.

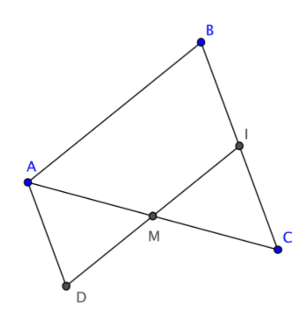
Raisonnement déductif à travers l'utilisation du théorème de Pythagore.

Résolution d'une équation.

Géométrie plane

Exemple de problème

A, B, C sont trois points non alignés, I est le milieu de [BC] et D est le point tel que ABID est un parallélogramme. Pourquoi le milieu M de [ID] est-il également le milieu de [AC] ?



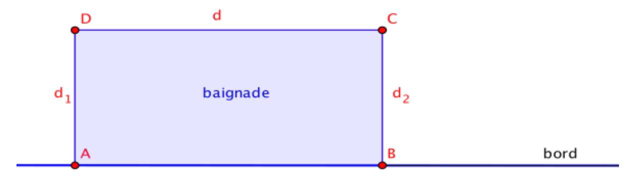
Commentaire

Raisonnement déductif utilisant des propriétés du parallélogramme.

Approche de la notion de fonction

Exemple de problème

Un maître-nageur dispose d'une corde de 160 m de long pour délimiter une zone de baignade surveillée rectangulaire. Où doit-il placer les bouées A et B pour que l'aire de la zone de baignade soit maximale ?



Commentaire

Utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice pour une approche numérique.

Modélisation algébrique.

Calcul littéral

Exemple de problème

Peut-on écrire 2016 comme somme de quatre entiers consécutifs ? Et 2018 ? Et ton année de naissance ?

Quels sont les nombres qui peuvent s'écrire comme somme de quatre entiers consécutifs ?

Commentaire

Raisonnement inductif basé sur des essais. Emission de conjectures.

Utilisation du calcul littéral comme outil de démonstration.

Bibliographie

- Raisonnement et démonstration
- Site de l'académie de Bordeaux : Initiation au raisonnement
- IREM de Rennes : L'enseignement de la démonstration
- « Initiation au raisonnement déductif au collège » Gilbert Arsac, Gisèle Chapiron, Alain Colonna, Gilles Germain, Yves Guichard, Michel Mante - Presses universitaires de Lyon, IREM de Lyon
- « Des mathématiques ensemble et pour chacun, 5ème » Jean-Philippe Rouquès, Hélène Staïner - CRDP Pays de la Loire
- « Des mathématiques ensemble et pour chacun, 4ème » Jean-Philippe Rouquès, Hélène Staïner - CRDP Pays de la Loire







Calculer

La pratique du calcul doit viser un double équilibre : d'une part entre automatisation et raisonnement, d'autre part entre une visée pragmatique (l'obtention d'un résultat) et un accès à la compréhension des objets mathématiques engagés dans le calcul (nombres, symboles, etc.). Par ailleurs, le développement des technologies informatiques a profondément modifié l'appréhension du calcul, tant au niveau des pratiques quotidiennes et sociales qu'à celui des pratiques scientifiques. D'une part, la plupart des algorithmes de calcul dont l'apprentissage occupait autrefois un temps important de la scolarité obligatoire sont aujourd'hui implémentés dans les calculatrices les plus simples, ce qui pose la question de la pertinence du maintien de leur enseignement, d'autre part la puissance de calcul des nouveaux outils modifie profondément l'économie du calcul et pose dans des termes renouvelés celle de la gestion des rapports entre le calcul et le raisonnement puisqu'elle favorise explorations, simulations et expérimentations préalables à la découverte de preuves.

Objectifs

Dans le prolongement du cycle 3, l'apprentissage du calcul au cycle 4 porte d'abord sur les nombres, dont le corpus s'élargit, puis, à travers l'introduction de l'algèbre, sur les symboles littéraux. La variété des objets mathématiques qu'il engage et des formes selon lesquelles il est pratiqué (calcul mental, calcul posé, calcul instrumenté, calcul exact, calcul approché), les liens qu'il permet d'établir avec les autres disciplines, les besoins sociaux, culturels et scientifiques auquel il doit répondre justifient la place essentielle accordée au calcul dans le programme du cycle 4.

Nous rappelons ci-dessous la description qui y est donnée de la compétence « calculer » :

> « Calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel).
>
> Contrôler la vraisemblance de ses résultats, notamment en estimant des ordres de grandeur ou en utilisant des encadrements.
>
> Calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, etc.) »

Cette description met en avant d'une part le lien entre calcul et raisonnement et d'autre part celui entre calcul mental, calcul à la main et calcul instrumenté.

L'objectif prioritaire de l'enseignement des mathématiques au cycle 4 est de faire faire des mathématiques aux élèves. Or « faire des mathématiques », c'est « résoudre des problèmes ». Pour autant, un élève ne peut pas résoudre de problème s'il ne maîtrise pas un minimum de technique. En effet, sans ce minimum, toute mise en œuvre d'une stratégie de résolution risque de se révéler particulièrement laborieuse, voire impossible à finaliser, ce qui est particulièrement démotivant pour l'élève. C'est la raison pour laquelle le programme du cycle 4 vise à renforcer et à élargir la maîtrise calculatoire des élèves. Cependant, cela ne doit pas se faire au détriment des activités de résolution de problèmes, qui constituent d'ailleurs un puissant levier pour motiver l'acquisition des techniques de

calcul. En particulier, il est indispensable de ne pas limiter l'activité des élèves les plus fragiles à des tâches purement techniques et il est déconseillé d'attendre systématiquement leur maîtrise avant de leur proposer de résoudre des problèmes.

Il est donc important que les activités mettant en jeu des calculs respectent un juste équilibre entre entraînement technique et résolution de problèmes et les mettent en synergie afin de construire progressivement et de façon différenciée l'habileté calculatoire qui permettra à chaque élève de poursuivre ses études avec confiance et succès.

Outre l'acquisition de techniques efficaces et le développement d'automatismes indispensables à la réalisation autonome d'une activité mathématique, l'apprentissage du calcul au cycle 4 vise :

- la familiarisation avec les nombres (notamment leurs différents registres de représentation) et les opérations, mais aussi la découverte de nouveaux nombres (les relatifs) et de nouveaux objets mathématiques engagés dans les calculs (les lettres) ;
- le développement de stratégies de vérification et de contrôle permettant de développer l'esprit critique et de favoriser une utilisation raisonnée des instruments de calcul.

Calcul automatisé et calcul réfléchi

Pour illustrer les liens entre automatisation de procédures de calcul et réflexion engagée pour mener à bien un calcul, nous nous appuierons sur deux exemples :

Premier exemple : un élève qui, ayant à calculer 29×21 le décompose en $29 \times 20 + 29$ est capable d'obtenir le résultat mentalement plus vite et plus sûrement qu'en posant la multiplication. De plus, il mobilise implicitement une propriété essentielle de la multiplication (sa distributivité par rapport à l'addition) qu'il pourra ensuite généraliser. Des raisonnements de ce type (comme d'autres sur les fractions ou les puissances) s'avèrent d'ailleurs nécessaires pour pallier d'éventuels oublis.

Deuxième exemple : un élève qui maîtrise la technique opératoire de l'addition sait qu'il peut l'utiliser pour calculer 998 + 1205. Son calcul est alors automatisé ; mais, considérant les nombres en jeu, il peut trouver plus rapide de raisonner sur ce calcul et se dire que, vu que 998 = 1000 - 2, il lui suffit d'ajouter 1000 et d'enlever 2 au second nombre, pour obtenir le résultat 2203. C'est ici l'associativité qui est mise en jeu.

Seuls les répertoires (au sens de connaissances organisées et hiérarchisées) dont on dispose et les algorithmes que l'on maîtrise permettent l'automatisation d'un calcul. Ce sont eux qui en font la force et en garantissent l'efficacité. Mais dès lors qu'il sort de la routine, le calcul engage nécessairement un raisonnement. Il est essentiel d'insister sur ce point et sur la nécessité de cultiver cette synergie entre automatisation et raisonnement dans l'apprentissage de tout calcul. En particulier, le travail de mémorisation des règles de calcul sur les nombres doit fournir l'occasion d'exercer le raisonnement et de travailler les propriétés des nombres et des opérations qui le fondent. Il est également important d'insister sur le fait que les répertoires enseignés ne sauraient se limiter à des répertoires de composition, comme on comprend malheureusement souvent l'apprentissage des tables d'addition ou de multiplication. Les résultats de la décomposition de nombres (en somme ou en produit) sont aussi importants que ceux de leur composition et, si l'égalité $9 \times 7 = 63$ n'est pas associée à $63 = 9 \times 7$; $9 = 63 \div 7$ et $7 = 63 \div 9$, elle sera d'une utilité bien moindre.

Parmi les automatismes à développer, on peut citer (mais la liste est loin d'être exhaustive) les changements de registre d'écriture (décimale, fractionnaire), l'application d'un opérateur fractionnaire (par exemple prendre les sept tiers de 12), d'un pourcentage, la transformation d'une fraction en pourcentage et vice versa, la multiplication et la division par 10, 100, 1000, 10 000, les conversions d'unités de longueur, d'aire, de volume, de durée, les produits et quotients de puissances de 10, le développement et la simplification d'expressions littérales.

Ces réflexes intellectuels s'acquièrent dans la durée sous la conduite du professeur. Ils se développent en mémorisant et en automatisant progressivement certaines procédures, certains raisonnements particulièrement utiles, fréquemment rencontrés et ayant valeur de méthode. Pour être disponibles, les automatismes doivent avoir été entretenus et régulièrement sollicités.

Toutefois un automatisme n'est pas un moyen pour comprendre plus vite ; il permet simplement d'aller plus vite une fois que l'on a compris. Si l'acquisition d'automatismes nécessite des exercices d'entraînement et de mémorisation, référés à des tâches simples, ces exercices ne sauraient suffire : l'entraînement et la mémorisation ne constituent pas une fin en soi et sont mis au service de la résolution de problèmes plus complexes dans lesquels ils prennent tout leur sens.

Progressivité des apprentissages

Les compétences de calcul numérique travaillées au cycle 3 sont à consolider tout au long du cycle 4. Elles portent sur les nombres entiers et décimaux positifs et les quatre opérations, et concernent aussi bien le calcul automatisé que réfléchi, effectué sous forme exacte ou approchée.

La pratique du calcul commence souvent sur des objets en cours de construction (par exemple, le calcul fractionnaire en 6e ou celui sur les nombres négatifs en 5e). Le rôle du calcul est alors décisif pour familiariser les élèves avec ces objets, leur manipulation étant un moyen d'en construire une représentation efficace. C'est particulièrement vrai lorsque la définition de ces objets n'est pas étudiée, parce qu'inaccessible aux élèves, comme dans le cas de la construction des ensembles de nombres. Le calcul permet alors de mettre en place de façon progressive et implicite les structures qui les régissent.

Pour effectuer des calculs semblables à ceux qui ont été présentés *supra* en lien avec l'associativité et la distributivité, le recours à la calculatrice, s'il permet d'obtenir les résultats, prive l'élève d'une familiarisation avec les propriétés des nombres et des opérations Les modalités d'utilisation de la calculatrice supposent donc une véritable réflexion de la part des enseignants. Un paragraphe de ce document est entièrement dédié au calcul instrumenté.

Concernant le calcul fractionnaire, les élèves ont appris au cycle 3 à additionner, soustraire et comparer des fractions de même dénominateur, en référence à la notion de partage. L'oral a pu jouer un rôle déterminant dans l'automatisation de procédures telles que « 3 septièmes + 5 septièmes = 8 septièmes ». La poursuite, au cycle 4, de l'apprentissage des fractions vise à les appréhender en tant que quotients. Cette notion est sollicitée pour institutionnaliser la technique de l'addition de deux fractions de même dénominateur à partir d'un exemple générique, pour effectuer le produit de fractions simples, comme par exemple $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ ou pour rechercher l'inverse d'une fraction simple. Ce travail est un préalable indispensable à la bonne compréhension des calculs de portée générale sur des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont des entiers relatifs.

Une bonne connaissance des fractions est une aide précieuse pour traiter les problèmes de proportionnalité. La détermination d'une quatrième proportionnelle peut reposer sur le cœfficient de proportionnalité, des propriétés en lien avec la linéarité ou le produit en croix.

Le calcul algébrique constitue un nouvel espace où va se déployer le raisonnement, en permettant notamment de démontrer en toute généralité des résultats constatés sur des exemples numériques (par exemple les propriétés du calcul fractionnaire). Pour préparer l'introduction du calcul littéral, il importe, dès le début du cycle 4, de renforcer le sens déjà connu du signe « égal » (par exemple dans l'égalité $\frac{3}{4} = 0{,}75$). Il va en effet être élargi à la fois à celui qu'il revêt dans une identité et dans une équation.

La notion d'identité correspond implicitement à la quantification universelle « pour tout », alors que celle d'équation correspond implicitement à une quantification existentielle (« existe-t-il une valeur de la variable pour laquelle deux formules donnent le même résultat ? »).

En fin de cycle 4, l'élève doit être capable de distinguer une identité du type $3(x + 2) = 3x + 6$, valable pour tout x, d'une équation du type $3(x + 2) = x + 7$.

Une explicitation de « l'environnement » de l'égalité (ne pas hésiter à écrire « l'égalité … est vraie pour tout x » ou « existe-t-il une valeur de x pour laquelle l'égalité …est vraie ? ») est certainement le meilleur levier pour faire comprendre aux élèves ces notions délicates.

Le travail sur le développement et la réduction d'expressions littérales (dans lesquelles on peut, au début, se passer des nombres négatifs) est mené de front avec la consolidation de la maîtrise du calcul sur les nombres relatifs, entiers ou décimaux.

Stratégies d'enseignement

Enseigner les stratégies calculatoires par petites touches

Un enseignement fréquent et régulier permet de donner à chaque élève la possibilité de s'approprier à son rythme les stratégies de calcul. Ainsi est-il plus efficace et moins rébarbatif pour un élève, d'être sollicité de manière régulière à partir de la classe de 4e, sur un petit nombre d'exercices de développement ou de réduction d'expressions littérales (ou de calcul fractionnaire dès la 5e), plutôt que d'y être confronté à haute dose sur un petit nombre de séances.

Pratiquer des activités de calcul mental

Ce que nous appelons « calcul mental » dépasse le cadre du calcul mental traditionnel, puisque nous y englobons le calcul mental faisant appel au raisonnement, qu'il soit numérique ou littéral. Le calcul mental est intéressant en soi, d'abord parce qu'il permet d'acquérir des procédures de calcul utiles pour la vie quotidienne et d'automatiser des savoir-faire qui, une fois disponibles, libèrent la pensée pour d'autres tâches plus complexes. L'entraînement au calcul mental porte sur les techniques opératoires s'appliquant aux nombres relatifs (entiers et décimaux) et aux fractions, mais aussi sur le calcul littéral. Il favorise l'appropriation des nombres et de leurs propriétés et permet d'enrichir leur appréhension dans différents registres.

Ainsi, 25 %, c'est à la fois un quart, la fraction $\frac{1}{4}$ et le décimal 0,25 ; cet automatisme permet par exemple le calcul immédiat de $24 \times 0{,}25$.

De bonnes compétences en calcul mental sont indispensables pour prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat, pour permettre une utilisation raisonnée de la calculatrice, pour développer l'esprit critique face à un résultat obtenu autrement.

Le calcul mental aide à la résolution de problèmes, il permet d'expérimenter, de prendre des initiatives, de développer des stratégies à partir d'essais et de tâtonnements, de développer aisance et rapidité dans la gestion de calculs plus complexes. Le calcul mental réfléchi (par exemple le calcul de 998 + 1205 présenté *supra*) est quant à lui le support à de véritables raisonnements.

La pratique régulière du calcul mental favorise la progressivité des apprentissages. Avant la formalisation d'un nouveau savoir, elle permet d'anticiper, de préparer son étude. Pendant la phase d'apprentissage, elle facilite l'appropriation des notions ou des propriétés travaillées. Après l'apprentissage, grâce à un réinvestissement régulier, elle permet l'appropriation pérenne des savoirs et développe la capacité à les mobiliser dans des situations inédites.

Le calcul mental fournit des supports d'évaluation pertinents : c'est une modalité efficace d'évaluation diagnostique. Sur le plan formatif, les temps de mise en commun permettent à la fois de dédramatiser l'erreur et de faciliter le débat participatif et argumenté. Les élèves qui réussissent en calcul mental

n'étant pas toujours exactement les mêmes que ceux qui réussissent dans d'autres activités mathématiques, il importe de reconnaître leurs réussites en prévoyant des situations d'évaluation sommative de calcul mental. Les activités mentales régulières, allant jusqu'à être ritualisées, facilitent la gestion de classe. Elles sont souvent des moments d'intense activité de la part de l'élève, car motivantes et stimulant l'attention.

Utiliser un exemple générique

En parallèle des écritures littérales, le recours à un exemple générique peut permettre de faire comprendre une démonstration à des élèves qui pourraient être déroutés par une approche purement formelle.

Ainsi, dans l'exemple suivant qui détaille le cas du produit de deux quotients, les calculs numériques menés dans la colonne de gauche peuvent être présentés plutôt que ceux de la colonne de droite, à condition toutefois que le résultat soit énoncé dans sa généralité.

	a, b, c et *d* sont quatre nombres quelconques ; *b* et *d* sont différents de zéro.
$\frac{2}{7}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 7 pour obtenir 2 donc $7\times\frac{2}{7}=2$. De même $3\times\frac{5}{3}=5$	$\frac{a}{b}$ est le nombre par lequel il faut multiplier *b* pour obtenir adonc $b\times\frac{a}{b}=a$. De même $d\times\frac{c}{d}=c$
Si on multiplie $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ par 7×3 , on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $7\times\frac{2}{7}\times3\times\frac{5}{3}$ soit, d'après ce qui précède : 2×5	Si on multiplie $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ par $b\times d$, on obtient en changeant l'ordre des facteurs dans le produit : $b\times\frac{a}{b}\times d\times\frac{c}{d}$ soit, d'après ce qui précède : $a\times c$.
On en déduit donc que $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}$ est le nombre par lequel il faut multiplier 7×3 pour obtenir 2×5 .	On en déduit donc que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ est le nombre par lequel il faut multiplier $b\times d$ pour obtenir $a\times c$.
Donc $\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}=\frac{2\times5}{7\times3}$.	Donc $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Anticiper et expliciter

Dès le début du cycle, le recours à une démarche par essais et ajustements et l'utilisation d'un tableur pour tester des valeurs permettent d'introduire progressivement la notion de solution d'une équation. Les limites des méthodes par tâtonnement ou par « remontée » des programmes de calcul permettent de justifier l'étude des techniques algébriques de résolution des équations du premier degré.

La part de raisonnement intrinsèque au calcul, lorsqu'il ne se réduit pas à un geste mécanique, mérite d'être explicitée dans l'enseignement. Il importe par exemple d'apprendre aux élèves à anticiper la forme la plus pertinente sous laquelle il faut écrire un nombre (écriture décimale ou fractionnaire, décomposition en somme ou en produit, etc.) ou une expression selon l'usage que l'on veut en faire. Il revient au professeur de prendre en charge le développement de cette intelligence du calcul chez ses élèves, par des moyens qui sont en partie communs et en partie propres à chaque type de calcul. Parmi les moyens communs, signalons l'organisation des différentes étapes d'un calcul complexe, le

choix des transformations à effectuer pour le simplifier, le contrôle (au moyen d'ordres de grandeur, de considérations de signe ou d'encadrement).

Trouver la juste place du calcul instrumenté

S'agissant de la calculatrice, du tableur ou de logiciels, la pertinence du calcul instrumenté dépend de l'usage que l'on en fait.

Le calcul instrumenté peut être néfaste aux apprentissages lorsque son usage est mal pensé, trop précoce ou exclusif. D'une part, les premiers pas dans l'apprentissage d'une notion calculatoire requièrent souvent une pratique dans laquelle la gestion mentale ou écrite est une aide à sa compréhension. Le recours systématique à la machine peut alors constituer un réel obstacle. D'autre part, l'apprentissage du calcul ne saurait se limiter à la production de résultats. Il comporte aussi tout un travail autour de la réflexion stratégique qu'il engage sur la recherche du calcul le plus approprié, son organisation et son contrôle à travers des allers retours permanents entre le résultat (même lorsqu'il a été obtenu à l'aide d'un instrument) et son interprétation.

Le calcul instrumenté facilite la résolution de problèmes, en permettant notamment aux élèves d'accéder à des sujets motivants sans être bloqués par des difficultés calculatoires. La possibilité d'utiliser des outils numériques (calculatrice, logiciels, etc.) a déplacé les équilibres entre exécution, pilotage et contrôle du calcul, ce qui permet de mettre aujourd'hui l'accent sur les aspects liés à l'intelligence du calcul. Encore faut-il intégrer la technologie de façon adéquate dans l'enseignement, en construisant des situations où pilotage et contrôle sont nécessaires.

Par sa rapidité à effectuer des calculs complexes et les possibilités d'accès à un grand nombre de données, le calcul instrumenté facilite aussi l'émission de conjectures dans des situations variées (résolution d'équations, comportement d'une fonction). Par ailleurs, il permet des changements de registres (numérique, symbolique, graphique) précieux pour l'assimilation.

Le recours au calcul instrumenté n'est pas dépourvu de raisonnement. Ainsi l'exécution d'un calcul sur machine requiert une organisation réfléchie (assimilation des priorités de calcul, conception d'un algorithme).

Son bon usage réside donc souvent dans une utilisation hybride, combinée avec des calculs mentaux ou réalisés à la main, notamment dans la résolution de problèmes.

Différenciation pédagogique

Le calcul mental favorise la différenciation pédagogique par la possibilité qu'il offre de faire vivre différentes procédures, d'accepter différentes réponses plus ou moins abouties. En évitant le passage systématique à l'écrit, il favorise l'entrée de certains élèves dans les apprentissages mathématiques ; il permet à chacun d'eux de développer et d'optimiser le champ de ses procédures, et au professeur de varier les consignes (résultats intermédiaires autorisés pour certains, avec l'objectif de s'en libérer petit à petit, temps variable accordé aux réponses, consignes écrites et/ou orales, forme des énoncés, etc.).

L'instrumentation du calcul a, elle aussi, un rôle à jouer au niveau de la différenciation pédagogique. En effet, pour certains élèves, un manque d'assurance dans le calcul écrit constitue un véritable handicap et une source de blocage. Or, de même qu'une orthographe incertaine ne saurait interdire l'écriture, le manque de dextérité calculatoire ne doit pas constituer un blocage à toute activité mathématique. Dans ces conditions, y compris dans des cas que l'on souhaiterait voir maîtrisés sans recours à la machine, un calcul assisté peut permettre à certains élèves de s'engager dans une activité mathématique présentant un réel enjeu en termes de modélisation ou de raisonnement et d'entrer dans des apprentissages qui leur seraient inaccessibles sans cette assistance.

Afin de faire face à l'hétérogénéité des élèves en termes de maîtrise calculatoire, la différenciation peut porter sur les nombres engagés dans un problème si l'on veut mettre l'accent sur sa mise en équation ou sa résolution plutôt que sur les techniques opératoires portant sur ces nombres. Par exemple, proposer à certains élèves des agrandissements dans lesquels « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 16 cm », à d'autres « le côté qui mesure 8 cm devra mesurer 12 cm », à d'autres encore « le côté qui mesure 7 cm devra mesurer 12 cm », permet d'adapter la situation à différents niveaux de maîtrise de la notion de quotient sans nuire à l'objectif de formation s'il est de faire comprendre le caractère multiplicatif de la situation. De même, pour faire comprendre la notion de solution d'une équation, avant d'automatiser la méthode algébrique de résolution d'une équation du premier degré, on pourra traiter des équations à coefficients entiers dont la solution peut être « devinée » sans peine, avant de passer à des équations dont la solution peut être trouvée ou approchée à l'aide d'un tableur.

Interdisciplinarité

Si le calcul est omniprésent dans l'apprentissage des mathématiques, il est également au cœur des interactions avec d'autres disciplines.

Le calcul numérique sur les mesures de grandeurs se prête à des interactions avec de nombreuses disciplines (physique, chimie, sciences de la vie et de la Terre, technologie, EPS, etc.). Le calcul littéral est particulièrement sollicité à travers l'exploitation des formules qui traduisent les lois physiques ($P = UI$, $P = mg$, relation liant l'énergie, la puissance électrique et la durée) au programme de physique-chimie du cycle 4. Le calcul lié à la proportionnalité et aux statistiques permet d'élargir ces interactions à une discipline comme la géographie et les nombres négatifs permettent de repérer des températures, des profondeurs, des dates, des créances, autant de notions qui dépassent le cadre de la seule discipline mathématique.

Communiquer à l'écrit et à l'oral

Communiquer efficacement dans le cadre d'une activité mathématique est un objectif de formation essentiel, recouvrant plusieurs champs de compétences : comprendre des énoncés, produire des textes aux finalités diverses, s'exprimer oralement.

C'est aussi par la médiation d'échanges que le professeur apprécie le niveau de maîtrise de l'élève. Cette double fonction de la communication, objet de formation et moyen d'apprécier la réussite de l'élève, a son importance. S'il convient que l'élève apprenne à s'exprimer avec un maximum de rigueur et de clarté, il ne faut pas pour autant considérer que celui qui s'exprime avec peine a nécessairement des difficultés mathématiques. Il s'agit avant tout d'ouvrir le champ de la résolution de problèmes au plus grand nombre d'élèves, y compris à ceux qui ont des difficultés à entrer dans les codes de la rédaction d'une démonstration.

Prendre en compte les spécificités de la langue utilisée dans l'activité mathématique

Toutes les difficultés des élèves ne sont pas imputables à des problèmes de langue et tous les problèmes de langue ne résultent pas d'un déficit lexical. Des malentendus peuvent naître d'énoncés ambigus, d'un déficit d'explications ou de la difficulté à gérer les interactions entre plusieurs registres de langue.

Le domaine 1 du socle commun, *les langages* pour penser et communiquer, vise à prendre en compte, au-delà de la maîtrise de la langue française, la spécificité de certains langages. Ainsi, la communication mise en œuvre en mathématique se caractérise par la coexistence d'un langage précis et codifié pouvant faire intervenir des symboles, et d'une langue plus proche de la langue naturelle qui permet d'échanger des idées ou de donner des explications. L'utilisation simultanée de ces deux niveaux d'expression et d'une gamme de niveaux intermédiaires, avec leurs règles propres qui peuvent varier, mérite un accompagnement particulier. Cet accompagnement doit notamment éveiller l'élève à l'idée que le débat scientifique est soumis à des spécificités.

En mathématiques, le sens d'une phrase est sensible à l'ordre des mots, ainsi qu'à la signification des connecteurs logiques ou de quantificateurs plus ou moins explicites.

> Le sens de la phrase « Tout multiple de 15 est multiple de 5 » est modifié si on intervertit les entiers mentionnés.
> La phrase « *On sait que ABCDE est un pentagone régulier, donc 360/5 = 72* (...) » n'est pas correcte, bien que l'élève ait sans doute correctement analysé la figure.
> Dans la phrase « Un carré a quatre angles droits », il faut comprendre que ce qui est dit vaut pour n'importe quel carré. Si l'on donne comme définition : « Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits », cette phrase apparemment proche de la précédente fournit une double information permettant de caractériser un rectangle.

En mathématiques, la concision des énoncés peut être source de malentendus.

> La même phrase « Tout multiple de 15 est multiple de 5 » peut être comprise à tort comme une équivalence.

La concision est par ailleurs un objectif, non pour sa dimension esthétique, mais pour la cohérence de la solution. Ainsi, la rédaction d'une démonstration relève d'une pratique très codifiée où par exemple il convient de ne pas multiplier les arguments si un seul peut suffire.

Bien entendu, un tel objectif doit faire l'objet d'une réflexion pédagogique afin d'adapter les attentes aux possibilités des élèves de collège, pour lesquels l'appropriation de cette contrainte est en cours d'acquisition.

En mathématiques, des tableaux, des graphiques ou d'autres modes de représentation, peuvent se substituer efficacement à des phrases qui seraient nettement plus difficiles à comprendre.

> Au même titre que l'on ne saurait remplacer les panneaux des gares affichant les horaires des trains par des phrases, la puissance des notations mathématiques permet de condenser un nombre important d'informations. Au lycée, un tableau de variation ou un arbre de probabilités sont porteurs de conventions que l'on peut mobiliser pour démontrer. De même au collège, un tableau de proportionnalité, le recours au calcul littéral, ou une figure codée permettent une économie de pensée.

De nombreux termes utilisés en mathématiques proviennent de la langue courante, mais prennent un sens différent. Une liste de termes polysémiques rencontrés en mathématiques au collège peut être portée à la connaissance des élèves [liste de termes polysémiques rencontrés en mathématiques].

En mathématiques, la structure d'une phrase ne renseigne pas toujours sur le statut de l'énoncé. On peut notamment distinguer : la donnée d'une information (énoncé d'un problème), l'institutionnalisation (définition, propriété), la démonstration, la consigne donnée par le professeur, les commentaires émis par l'élève (narration de recherche) ou par le professeur (annotations sur une copie).

> Par exemple, les phrases suivantes figurant dans un même cahier d'élève sont construites de la même façon, mais ont une fonction différente : « La somme des angles d'un triangle est égale à 180°. », « La longueur totale du trajet est de 60 km », « I milieu de [AB] est équidistant des points A et B ».

Plus généralement, la part importante d'implicite constitue un obstacle dont il faut prendre acte.

L'accumulation de ces difficultés potentielles montre à quel point la compréhension d'un texte mathématique et, a fortiori, la production d'un texte tel qu'une démonstration recèlent de nombreux obstacles. En avoir conscience doit permettre au professeur d'adapter ses exigences pour mieux former les élèves.

Il va de soi que la détection de telles difficultés ne peut s'opérer à partir d'un catalogue préétabli. Une démarche d'entretien avec l'élève concerné est indispensable.

Placer les élèves en situation de production écrite

Garantir la compréhension des énoncés et des consignes est un préalable essentiel.

Certaines habitudes de travail instaurées au cycle 3 peuvent être avantageusement prolongées au cycle 4, comme par exemple : ménager un temps de lecture silencieuse des énoncés, faire expliciter le vocabulaire spécifique, lui donner du sens en précisant éventuellement son étymologie, s'assurer de la compréhension des textes lus.

En vue de renouveler l'activité de lecture pour solliciter l'attention et l'esprit critique, se sont développées certaines activités : construction par les élèves d'un énoncé de problème à partir de quelques données, ou présence dans un énoncé des données superflues. Cette dernière pratique peut présenter un intérêt dès l'instant où elle ne vise pas à tendre des pièges mais s'apparente au traitement de données réelles.

Au-delà de ces considérations, en vue d'étendre leurs compétences dans le domaine de la lecture, il convient d'inciter les élèves à lire en dehors de la classe d'autres textes que ceux du cours ou des exercices (articles, revues, livres, etc.) et de réinvestir ces lectures en classe.

Le passage au cycle 4 s'accompagne d'exigences plus importantes en matière de production écrite, avec à la fois un volume plus conséquent et un niveau de complexité plus élevé.

Cette évolution doit être progressive sur la durée du cycle et s'accompagner d'un certain nombre de précautions d'ordre pédagogique.

On peut distinguer plusieurs modalités :

- les écrits de la classe avec le professeur ;
- les écrits personnels ;
- les écrits de groupe.

Les écrits rédigés par la classe avec le professeur ont généralement pour objet d'institutionnaliser et de structurer ce qui est à retenir.

Une organisation efficace des supports utilisés (cahier, ordinateur, tablette, etc.) doit contribuer à la qualité des traces écrites conservées. Il est important de :

- définir l'organisation du cahier, en prenant appui sur un plan clairement affiché et sur d'autres éléments structurants ;
- préciser à chaque séance la place de la trace écrite (cours, exercices, écrits personnels, etc.) ;
- relever régulièrement les cahiers et si nécessaire les faire corriger par les élèves ;
- prévoir durant la séance des moments où l'élève copie ce qui est écrit au tableau ;
- s'assurer systématiquement de la compréhension du texte copié.

Parallèlement, un entraînement à la prise de notes est à instaurer très progressivement en concertation avec les professeurs des différentes disciplines.

Mais bien entendu, la pratique d'écriture en classe ne saurait se réduire à la copie de ce que le professeur écrit au tableau. L'enjeu majeur à ce niveau consiste à procurer aux élèves une marge d'initiative suffisante pour leur permettre de progresser dans l'écriture de textes mathématiques.

Il est donc primordial d'accorder très régulièrement un temps significatif à la production d'écrits personnels. Ce temps d'écriture doit être clairement identifié et bénéficier de conditions propices (silence, durée suffisante). Cette production peut consister à exposer des idées, à décrire une démarche, ou à exposer une solution.

Ménager une certaine difficulté est nécessaire, mais on évitera de fractionner artificiellement les difficultés dans l'espoir que l'élève saura ensuite réunir des savoir-faire exercés séparément. Ainsi, l'usage de fiches à trous à compléter ne permet pas de le placer en situation d'expression écrite et ne présente donc pas d'intérêt pour sa formation dans ce domaine.

Il faut accepter la production d'écrits intermédiaires, forcément imparfaits, par exemple au moyen d'un cahier de brouillon qui permet de « *prôner l'imperfection pour exiger in fine la perfection* »[1].

Une activité intéressante peut consister à comparer les différentes versions d'un texte, par exemple les solutions données par plusieurs élèves ou par un même élève à différents moments.

Ces recommandations correspondent parfaitement à la consigne donnée aux candidats lors des épreuves d'examen (DNB, baccalauréat) : « Toute trace de recherche sera prise en compte dans l'évaluation », invitant les élèves à s'engager dans une activité de recherche et à faire part de leur cheminement.

Le travail d'écriture à l'initiative de l'élève doit lui permettre de prendre conscience des exigences particulières du discours mathématique. Plutôt habitué à raconter qu'à expliquer, le plus souvent selon une logique d'exposition chronologique, l'élève doit passer de la narration à un mode d'exposé scientifique où l'auteur ne s'implique pas de la même façon.
Par exemple, une démonstration est rédigée selon un mode neutre, en mettant en évidence les enchaînements logiques.

De ce point de vue, la pratique dite des « figures téléphonées » où l'élève doit décrire à un camarade, qui ne la voit pas, une figure donnée dans le but qu'il la reproduise, est particulièrement formatrice. Cet exercice, qui peut également se concevoir à l'oral, demande à l'élève prise de recul et rigueur d'expression, tout en l'obligeant à apprécier correctement le degré d'explicite attendu.

S'inscrivant dans le cadre de travaux collectifs, les écrits de groupe peuvent déboucher sur la synthèse de propositions individuelles. Ils sont un moyen d'apprendre à travailler ensemble à travers la mise en commun des idées ou la confrontation des démarches.

Quelle que soit la modalité adoptée, la place de la production écrite dans la séance gagne à être méthodiquement programmée. L'un des enjeux est d'éviter de superposer les difficultés. Ainsi il vaut mieux ne pas confondre le temps de la réflexion, où émergent les idées, celui de la mise en forme des idées, où l'on tend vers une formalisation de la solution, et celui de la rédaction de celle-ci sous une forme aboutie. Accepter de différer le moment de la production écrite plutôt que de demander immédiatement un texte irréprochable, peut également libérer la recherche. Dans le même esprit, l'évaluation ne peut reposer uniquement sur la production du produit fini.

1. D'après La maîtrise de la langue au collège, page 92 – voir bibliographie.







Développer les compétences d'expression orale

Si l'enseignement est devenu moins magistral, la répartition du temps de parole entre le professeur et les élèves demeure parfois déséquilibrée. Plus que la durée des interventions, c'est la nature des prises de parole qui doit être examinée. Il arrive que la participation de l'élève se limite à répondre à des questions fermées appelant des réponses très brèves. Le professeur, soucieux d'aboutir rapidement, ne donne pas toujours l'occasion ni le temps d'élaborer une réponse construite. L'échange peut alors consister en la succession de séquences : question du professeur - réponses d'élèves - commentaires du professeur.

Cette pratique résulte d'un double malentendu à propos de la participation orale :

- penser que son seul objectif est d'entretenir une « classe vivante », pour créer une ambiance qui devrait être favorable à l'apprentissage ;
- considérer qu'elle doit conduire à tout prix à « la » bonne réponse pour ensuite ne conserver qu'elle.

Or, la maîtrise de l'expression orale, au même titre que celle de l'écrit, constitue un objectif de formation à part entière.

Cette maîtrise ne s'acquiert pas spontanément. Elle a ses spécificités et ne se limite pas à une transposition des compétences relevant de l'écrit.

Pour atteindre ces objectifs, il peut être utile de veiller à :

- réunir de bonnes conditions d'écoute ;
- privilégier des questions appelant une réponse structurée ;
- exiger des réponses par phrases complètes ;
- solliciter tous les élèves ;
- enrichir le lexique ;
- faire mémoriser des écrits de référence (définitions, théorèmes, etc.).

Mais au-delà des aspects linguistiques, qui sont essentiels, la maîtrise de l'oral gagnera à s'intégrer dans une perspective de communication. Aussi s'acquiert-elle par une pratique régulière dans des situations pertinentes.

En effet, la pratique de l'oral n'est formatrice que si elle répond à un véritable besoin de s'exprimer. En d'autres termes, une pédagogie de l'oral passe par des situations de communication offrant de vrais enjeux pour les interlocuteurs : s'expliquer, décrire, argumenter, convaincre, décider, etc.

Par conséquent, il est souhaitable de diversifier les situations de communication :

- échanges pour s'assurer de la compréhension d'un énoncé ;
- organisation d'un débat entre élèves ou groupes d'élèves pour confronter des pistes de résolution d'un problème ;
- présentation d'une solution ;
- compte rendu de l'avancée d'un travail réalisé en petits groupes ;
- exposé d'un travail de recherche sur un thème donné, pouvant être à dimension historique ou culturelle, ou concerner une notion non encore étudiée ;
- aide à d'autres élèves dans le cadre d'un tutorat.

Par ailleurs, si l'une et l'autre recouvrent des compétences spécifiques, la maîtrise de l'oral et celle de l'écrit sont liées entre elles et le travail réalisé en faveur de l'une peut être réinvesti au service de l'autre.

Une organisation structurée des séances doit permettre de bien articuler le temps consacré à l'oral et celui de l'écrit, en les identifiant clairement. De plus, on sait que l'élève en difficulté a souvent du mal à se situer entre les différentes phases d'une séance. Il ne perçoit pas forcément à quel moment on passe de l'exploration à l'institutionnalisation, ou de la conjecture à la démonstration. Des transitions explicites doivent le guider dans le suivi du cours et faciliter sa participation.

Enfin, dans le registre de la maîtrise de la langue, une concertation étroite entre les professeurs des différentes disciplines est nécessaire pour la mise en place d'actions cohérentes et complémentaires.

Bibliographie

- La maîtrise de la langue au collège (direction des lycées et collège, CNDP, 1997 – ouvrage diffusé dans tous les CDI en 1997-1998)
- Site de l'académie d'Aix-Marseille : « Maîtrise de la langue dans toutes les disciplines »
- Site de l'académie de Bordeaux : « Maîtrise de la langue »
- Site de l'académie de Créteil : « Enseignement des mathématiques et maîtrise de la langue »
- IREM de Rennes : « L'enseignement de la démonstration »
- Les dimensions linguistiques de toutes les matières scolaires, un guide pour l'élaboration des curriculums et pour la formation des enseignants (Conseil de l'Europe, 2015)